BÀI TOÁN (viết lại cho rõ)

Ví dụ – Trang 7

Xét trường vectơ:

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, x, y)$$

Câu hỏi:

Trường $\vec{F}$ **có phải là trường bảo toàn trên** $\mathbb{R}^3$ hay không?

I. NHẮC LẠI LÝ THUYẾT CỐT LÕI (rất quan trọng)

1. Trường bảo toàn là gì? (nói nôm na)

Một trường $\vec{F}$ gọi là **bảo toàn** nếu tồn tại **hàm thế** $f(x, y, z)$ sao cho:

$$\vec{F} = \nabla f$$

Nghĩa là:

$$\vec{F} = (f_x, f_y, f_z)$$

2. Điều kiện CẦN (dùng để loại nhanh)

Nếu $\vec{F}$ là trường bảo toàn $\Longrightarrow$ **curl** $\vec{F} = 0$

Hệ quả cực mạnh khi làm bài:

- Chỉ cần tìm **curl** $\neq 0$
- **Kết luận ngay: KHÔNG bảo toàn**
- Không cần tìm hàm thế
- Không cần tích phân gì thêm

II. ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN (từng bước)

Bước 1: Kiểm tra độ trơn của trường

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, x, y)$$

Các thành phần:

- $P = y$
- $Q = x$
- $R = y$

Đây đều là **đa thức bậc 1**, nên:

- có đạo hàm riêng
- liên tục
- trơn cấp 1 trên toàn $\mathbb{R}^3$

Thỏa điều kiện áp dụng công thức curl

Bước 2: Viết công thức curl (đúng khuôn)

Công thức **máy móc phải thuộc**:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Thay $P = y, Q = x, R = y$ vào:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & x & y \end{vmatrix}$$

Bước 3: Khai triển định thức (làm thật chậm)

Ta nhớ quy tắc:

$$\vec{i}(\partial_y R - \partial_z Q) - \vec{j}(\partial_x R - \partial_z P) + \vec{k}(\partial_x Q - \partial_y P)$$

Tính từng thành phần một

Thành phần theo $\vec{i}$

$$\partial_y R - \partial_z Q = \partial_y(y) - \partial_z(x)$$

- $\partial_y(y) = 1$
- $\partial_z(x) = 0$

$$= 1 - 0 = 1$$

Thành phần theo $\vec{j}$

$$\partial_x R - \partial_z P = \partial_x(y) - \partial_z(y)$$

- $\partial_x(y) = 0$
- $\partial_z(y) = 0$

$$= 0 - 0 = 0$$

Nhớ có dấu **trừ phía trước $\vec{j}$**:

$$-0 = 0$$

Thành phần theo $\vec{k}$

$$\partial_x Q - \partial_y P = \partial_x(x) - \partial_y(y)$$

- $\partial_x(x) = 1$
- $\partial_y(y) = 1$

$$= 1 - 1 = 0$$

Bước 4: Gom kết quả

$$\nabla \times \vec{F} = (1, 0, 0)$$

III. KẾT LUẬN (chốt hạ rất gọn)

Ta thấy:

$$\nabla \times \vec{F} = (1, 0, 0) \neq \vec{0}$$

Theo **điều kiện cần** của trường bảo toàn:

> Nếu là trường bảo toàn $\Rightarrow$ curl $= 0$
>
> Nhưng ở đây curl $\neq 0$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\boxed{\text{Trường } \vec{F}(x, y, z) = (y, x, y) \text{ KHÔNG là trường bảo toàn trên } \mathbb{R}^3}$$

IV. GHI NHỚ ĐỂ ĐI THI (rất quan trọng)

Gặp dạng:

> "Xét trường F... có bảo toàn không?"

Luôn làm theo thứ tự:

1. Kiểm tra miền ($\mathbf{R^3}$ $\rightarrow$ hình sao $\rightarrow$ ok)
2. Tính **curl F**
3. Nếu **curl** $\neq 0$ $\rightarrow$ **chốt luôn: KHÔNG bảo toàn**
4. **Không cần** tìm hàm thế
5. **Không cần** tích phân

BÀI TOÁN (chép lại cho rõ)

Ví dụ – Trang 9

Xét trường vectơ:

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2\right)$$

Yêu cầu:

1. Trường $\vec{F}$ **có bảo toàn hay không?**
2. **Nếu có**, hãy **tìm hàm thế** $f(x,y,z)$.

I. NHẮC LẠI CHIẾN LƯỢC LÀM DẠNG BÀI NÀY

Khi đề hỏi **"có bảo toàn không? nếu có tìm hàm thế"**, ta làm theo **3 bước chuẩn**:

Bước 1: Kiểm tra miền

- Miền có phải **mở & hình sao** không?
- Nếu là $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ **auto hình sao**

Bước 2: Tính curl F

- Nếu curl $\neq 0 \rightarrow$ **không bảo toàn**
- Nếu curl $= 0 \rightarrow$ **có bảo toàn**

Bước 3: Nếu có bảo toàn $\rightarrow$ tìm hàm thế f

- Giải hệ:

$$\nabla f = \vec{F}$$

II. BƯỚC 1 – KIỂM TRA MIỀN

Trường $\vec{F}$ được xác định trên:

$$\mathbb{R}^3$$

Nhận xét quan trọng:

- $\mathbb{R}^3$ là **miền mở**
- $\mathbb{R}^3$ là **miền hình sao**

Đủ điều kiện áp dụng Bổ đề Poincaré

III. BƯỚC 2 – TÍNH CURL F (làm rất chậm)

1. Viết rõ các thành phần của F

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

trong đó:

- $P = y^2 z^3$
- $Q = 2xyz^3$
- $R = 3xy^2 z^2$

2. Công thức curl (bắt buộc thuộc)

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Hay viết tường minh:

$$\nabla \times \vec{F} = \Big(\partial_y R - \partial_z Q, \partial_z P - \partial_x R, \partial_x Q - \partial_y P\Big)$$

3. Tính từng thành phần (rất chậm)

Thành phần thứ nhất

$$\partial_y R - \partial_z Q$$

- $R = 3xy^2 z^2$

$$\partial_y R = 6xyz^2$$

- $Q = 2xyz^3$

$$\partial_z Q = 6xyz^2$$
$$\partial_y R - \partial_z Q = 6xyz^2 - 6xyz^2 = 0$$

Thành phần thứ hai

$$\partial_z P - \partial_x R$$

- $P = y^2 z^3$

$$\partial_z P = 3y^2 z^2$$

- $R = 3xy^2 z^2$

$$\partial_x R = 3y^2 z^2$$
$$= 3y^2 z^2 - 3y^2 z^2 = 0$$

Thành phần thứ ba

$$\partial_x Q - \partial_y P$$

- $Q = 2xyz^3$

$$\partial_x Q = 2yz^3$$

- $P = y^2z^3$

$$\partial_y P = 2yz^3$$
$$= 2yz^3 - 2yz^3 = 0$$

4. Kết luận curl

$$\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 0)$$

IV. KẾT LUẬN PHẦN 1: CÓ BẢO TOÀN KHÔNG?

- curl F = 0
- miền là $\mathbb{R}^3$ (mở, hình sao)

Theo **Bổ đề Poincaré**:

$$\boxed{\vec{F} \text{ là trường bảo toàn}}$$

V. BƯỚC 3 – TÌM HÀM THẾ f (phần quan trọng nhất)

1. Viết hệ phương trình gradient

Ta cần tìm $f(x, y, z)$ sao cho:

$$\nabla f = \vec{F}$$

Tức là:

$$\begin{cases} f_x = y^2z^3 \\ f_y = 2xyz^3 \\ f_z = 3xy^2z^2 \end{cases}$$

2. Tích phân phương trình đầu tiên (theo x)

$$f_x = y^2 z^3$$

Coi y, z là **hằng số**, tích phân theo x:

$$f(x, y, z) = \int y^2 z^3 \, dx$$

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 + C(y, z)$$

Cực kỳ quan trọng:

"Hằng số" sau khi tích phân theo x → có thể là **hàm của y và z**

3. So với phương trình thứ hai

Ta có:

$$f_y = \partial_y (xy^2 z^3 + C(y, z))$$

Tính đạo hàm:

- $\partial_y (xy^2 z^3) = 2xyz^3$
- $\partial_y C(y, z) = C_y(y, z)$

$$f_y = 2xyz^3 + C_y(y, z)$$

Nhưng theo đề:

$$f_y = 2xyz^3$$

So sánh hai vế:

$$C_y(y, z) = 0$$

$C(y, z)$ **không phụ thuộc y**

⇒

$$C(y, z) = D(z)$$

4. So với phương trình thứ ba

Giờ ta có:

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 + D(z)$$

Tính f_z:

- $\partial_z (xy^2 z^3) = 3xy^2 z^2$
- $\partial_z D(z) = D'(z)$

$$f_z = 3xy^2 z^2 + D'(z)$$

Theo đề:

$$f_z = 3xy^2 z^2$$

So sánh:

$$D'(z) = 0$$

⇒

$$D(z) = K \quad \text{(hằng số)}$$

VI. HÀM THẾ CUỐI CÙNG

$$\boxed{f(x,y,z) = xy^2z^3 + K}$$

(với K là hằng số bất kỳ)

VII. TÓM TẮT NGẮN GỌN (để nhớ đi thi)

Gặp bài **"có bảo toàn không, nếu có tìm hàm thế"**:

1. Kiểm tra miền ($\mathbf{R^3} \rightarrow$ ok)
2. Tính curl
3. curl $= 0 \rightarrow$ bảo toàn
4. Viết hệ f_x, f_y, f_z
5. Tích phân **từng bước – so khớp từng biến**

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2\right)$$

Slide đã làm các bước trước:

- **Bước 1**: Kiểm tra miền xác định → là $\mathbb{R}^3$ ⇒ miền mở, hình sao
- **Bước 2**: Tính curl $\vec{F} = (0,0,0)$
- **Bước 3**: Kết luận $\vec{F}$ là **trường bảo toàn**
- **Bước 3.3**: **Tìm hàm thế** φ sao cho

$$\nabla\varphi = \vec{F}$$

Em **chưa theo kịp bước 3.3**, tức là **chưa hiểu cách tìm hàm thế**. Giờ ta làm từ từ.

BƯỚC 3.3 – TÌM HÀM THẾ φ

1. Viết lại điều kiện "có hàm thế" cho dễ nhìn

Nếu $\vec{F} = (P,Q,R)$ thì:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = P = y^2z^3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q = 2xyz^3 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = R = 3xy^2z^2 \end{cases}$$

Nhiệm vụ: **tìm một hàm** $\varphi(x,y,z)$ sao cho đạo hàm riêng của nó khớp với 3 biểu thức này.

2. Luôn bắt đầu từ phương trình DỄ NHẤT

Ta chọn phương trình đầu:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = y^2z^3$$

Ý nghĩa:

- Lấy đạo hàm theo **x**
- Mà kết quả **không có x**

$\Longrightarrow$ khi tích phân ngược theo x, ta coi y,z là **hằng số**

3. Tích phân theo x (đây là chỗ hay rối)

$$\varphi(x, y, z) = \int y^2 z^3 \, dx$$

Vì $y^2 z^3$ **không phụ thuộc x**, nên:

$$\int y^2 z^3 \, dx = x \, y^2 z^3$$

Cực kỳ quan trọng:

Vì ta chỉ tích phân theo **x**, nên **"hằng số tích phân" có thể phụ thuộc** y, z

$\Rightarrow$ Viết đúng là:

$$\boxed{\varphi(x, y, z) = xy^2 z^3 + g(y, z)}$$

Đây chính là kết quả **trung gian của bước 3.3**

Nhiều bạn **mất g(y,z)** là sai luôn từ đây.

4. Dùng phương trình thứ hai để tìm $g(y, z)$

Ta lấy đạo hàm theo y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 z^3 + g(y, z))$$

Tính từng phần:

- $\frac{\partial}{\partial y}(xy^2 z^3) = 2xyz^3$
- $\frac{\partial}{\partial y}(g(y, z)) = g_y(y, z)$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xyz^3 + g_y(y, z)$$

5. So sánh với $Q = 2xyz^3$

Theo đề:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xyz^3$$

$\Longrightarrow$

$$2xyz^3 + g_y(y, z) = 2xyz^3$$

$\Longrightarrow$

$$g_y(y, z) = 0$$

6. Kết luận từ $g_y = 0$

Đạo hàm theo y bằng 0 $\Longrightarrow$ **g không phụ thuộc y**
$\Longrightarrow$

$$g(y, z) = h(z)$$

7. Dùng phương trình thứ ba để kiểm tra

Giờ:

$$\varphi(x, y, z) = xy^2z^3 + h(z)$$

Lấy đạo hàm theo z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

So sánh với:

$$R = 3xy^2z^2$$

$\Longrightarrow$

$$h'(z) = 0 \Rightarrow h(z) = C$$

8. KẾT LUẬN CUỐI CÙNG (xong bước 3.3)

Hàm thế là:

$$\boxed{\varphi(x, y, z) = xy^2z^3 + C}$$

TÓM TẮT RIÊNG BƯỚC 3.3 (để nhớ)

1. Chọn **1 phương trình**, thường là $\partial\varphi/\partial x$
2. **Tích phân theo đúng biến**
3. **Nhớ cộng hằng số phụ thuộc các biến còn lại**
4. Dùng các phương trình còn lại để **triệt dần hằng số**
5. Ra hàm thế

Giải tích phân bề mặt bằng công thức Gauss–Ostrogradsky

1 Xác định đúng ví dụ trang 16 trong file

Dựa trên file `26-01-08 Stokes-Gauss-update1.pdf`, **ví dụ trang 16** chính là:

> **Ví dụ (trang 16)**
> Tính **thông lượng** của trường
> $$\vec{F}(x,y,z) = (2x + e^{yz},\ x^2 y,\ yz)$$
> **qua mặt cầu đơn vị**
> $$S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
> **định hướng ra ngoài**.

Slide cũng chỉ rõ:

- **Tính trực tiếp rất phức tạp**
- ⇒ **Sử dụng công thức Gauss–Ostrogradsky**

2 Nhắc lại công thức Gauss–Ostrogradsky (rất quan trọng)

Nếu:

- E là **khối kín**
- $S = \partial E$ là **mặt biên**
- $\vec{F}$ trơn

thì:

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV}$$

Ý nghĩa:
⇒ **Thông lượng qua mặt kín**
=
⇒ **Tích phân của divergence trong khối**

3 Bước 1 – Xác định khối E

Mặt S là:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Đây là **mặt cầu đơn vị**
$\Rightarrow$ Khối E là:

$$E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Hình học rất quen $\rightarrow$ dùng tọa độ cầu

4 Bước 2 – Tính divergence của $\vec{F}$ (làm cực chậm)

Trường vectơ:

$$\vec{F} = (P, Q, R) = (2x + e^{yz},\ x^2 y,\ yz)$$

Công thức:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Tính từng đạo hàm

(1) Thành phần $P = 2x + e^{yz}$

- $\dfrac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$
- $\dfrac{\partial}{\partial x}(e^{yz}) = 0$ (vì **không chứa** x)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2$$

(2) Thành phần $Q = x^2 y$

- x^2 coi là **hằng**
- $\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 1$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = x^2$$

(3) Thành phần $R = yz$

- y là hằng
- $\dfrac{\partial}{\partial z}(z) = 1$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = y$$

Cộng lại

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{F} = 2 + x^2 + y}$$

5 Bước 3 – Áp dụng Gauss–Ostrogradsky

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} (2 + x^2 + y)\, dV$$

6 Bước 4 – Chuyển sang tọa độ cầu (rất chậm)

Công thức tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

Phần tử thể tích:

$$dV = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Cận tích phân (viết đầy đủ):

Biến	Cận
ρ	$0 \le \rho \le 1$
φ	$0 \le \varphi \le \pi$
θ	$0 \le \theta \le 2\pi$

7 Bước 5 – Thay vào tích phân

Biểu thức bên trong:

- $x^2 = \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta$
- $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$

Thay vào:

$$\iiint_E (2 + x^2 + y)\, dV$$

$\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(2 + \rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho \sin\varphi \sin\theta\right) \rho^2 \sin\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\rho$$

8 Bước 6 – Tách tích phân (điều quan trọng)

Ta tách thành **3 tích phân**:

(I) Thành phần 2

$$\int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} 2d\theta$$

Tính:

- $\int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}$
- $\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = 2$
- $\int_0^{2\pi} 2d\theta = 4\pi$

$\Rightarrow$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4\pi = \frac{8\pi}{3}$$

(II) Thành phần x^2

$$\int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta$$

- $\int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{1}{5}$
- $\int_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi = \frac{4}{3}$
- $\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi$

$\Rightarrow$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4\pi}{15}$$

(III) Thành phần y

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

$\Rightarrow$ **Toàn bộ tích phân = 0**
Do đối xứng – hàm lẻ theo θ

9 Bước 7 – Cộng tất cả lại

$$\frac{8\pi}{3} + \frac{4\pi}{15} + 0 = \frac{40\pi + 4\pi}{15} = \boxed{\frac{44\pi}{15}}$$

10 KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{44\pi}{15}}$$

11 Tóm tắt cho người yếu

1. **Nhận ra mặt kín** $\rightarrow$ dùng Gauss
2. **Tính div F thật cẩn thận**
3. **Đổi tọa độ cầu**
4. **Viết cận đầy đủ**
5. **Nhận diện phần lẻ $\rightarrow$ bằng 0**

Giải tích phân mặt bằng Gauss–Ostrogradsky
Phiên bản KHÔNG LỎ – Từng bước chi tiết

BÀI TOÁN (viết lại cho rõ)

Tính tích phân mặt:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

trong đó

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(xy,\ y^2 + e^{xz^2},\ \sin(xy)\big)$$

- S là **toàn bộ mặt bao** của khối E
- E bị chặn bởi:
  - mặt trụ parabolic: $z = 1 - x^2$
  - các mặt phẳng:
    $$z = 0, \quad y = 0, \quad y + z = 2$$
- **Mặt S định hướng ra ngoài khối E**

1 BƯỚC 1: NHẬN DIỆN DẠNG BÀI → DÙNG GAUSS–OSTROGRADSKY

Vì:

- S là **mặt kín**
- đề yêu cầu $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$
- định hướng **ra ngoài**

⇒ **Áp dụng được định lý Gauss–Ostrogradsky**:

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV}$$

⇒ Từ đây: **không còn tích phân mặt**, mà là **tích phân khối**

2 BƯỚC 2: TÍNH DIVERGENCE (KHÔNG NHẢY BƯỚC)

Viết lại $\vec{F}$:

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

với:

$$P = xy, \quad Q = y^2 + e^{xz^2}, \quad R = \sin(xy)$$

Công thức divergence:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Tính từng phần:

- $\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$
- $\frac{\partial}{\partial y}(y^2 + e^{xz^2}) = 2y$

  vì e^{xz^2} **không phụ thuộc** y
- $\frac{\partial}{\partial z}(\sin(xy)) = 0$

⇒ KẾT LUẬN:

$$\operatorname{div} \vec{F} = y + 2y + 0 = \boxed{3y}$$

3 BƯỚC 3: VIẾT MIỀN KHỐI E (CỰC KỲ QUAN TRỌNG)

Ta xét **từng điều kiện hình học**:

Theo trục x:

Từ:

$$z = 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Theo trục z:

- đáy: $z = 0$
- trần: $z = 1 - x^2$

⇒

$$0 \leq z \leq 1 - x^2$$

Theo trục y:

- $y = 0$
- $y + z = 2 \Rightarrow y = 2 - z$

$\Rightarrow$

$$0 \le y \le 2 - z$$

MIỀN E VIẾT ĐẦY ĐỦ:

$$E = \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1 - x^2 \\ 0 \le y \le 2 - z \end{cases}$$

4 BƯỚC 4: LẬP TÍCH PHÂN KHỐI (VIẾT CẬN ĐẦY ĐỦ)

Theo thứ tự $(dy\,dz\,dx)$ (giống slide):

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E 3y\,dV = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{2-z} 3y\,dy\,dz\,dx$$

5 BƯỚC 5: TÍCH PHÂN THEO y (RẤT CHẬM)

Xét:

$$\int_0^{2-z} 3y\,dy$$

- Nguyên hàm:

$$\int 3y\,dy = \frac{3y^2}{2}$$

- Thế cận:

$$= \frac{3(2-z)^2}{2} - 0$$

$\Rightarrow$ Đưa ra ngoài:

$$= \frac{3}{2}(2-z)^2$$

6 BƯỚC 6: TÍCH PHÂN THEO z

Ta có:

$$\int_0^{1-x^2} \frac{3}{2}(2-z)^2\,dz$$

Đặt:

$$u = 2 - z \Rightarrow du = -dz$$

Hoặc làm trực tiếp:

$$\int (2-z)^2 dz = -\frac{(2-z)^3}{3}$$

Thế cận:

$$\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} = -\frac{(1+x^2)^3}{3} + \frac{8}{3}$$

Nhân với $\frac{3}{2}$:

$$= \frac{1}{2}\Big(8 - (1+x^2)^3\Big)$$

7 BƯỚC 7: TÍCH PHÂN THEO x

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\Big(8 - (1+x^2)^3\Big) dx$$

Tách ra:

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} 8\, dx - \int_{-1}^{1} (1+x^2)^3 dx\right]$$

Khai triển:

$$(1+x^2)^3 = 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6$$

Tích phân từng hạng:

$$\int_{-1}^{1} 1 dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} x^6 dx = \frac{2}{7}$$

Cộng lại:

$$2 + 2 + \frac{6}{5} + \frac{2}{7} = \frac{184}{35}$$

KẾT QUẢ CUỐI CÙNG

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{184}{35}}$$

ĐỀ BÀI (ví dụ trang 24 – ghi nguyên văn bản chất)

Cho trường vectơ:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y,\ 2 - 2z)$$

Mặt S cho bởi:

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

và **định hướng lên trên**.

Yêu cầu tính thông lượng:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

CHIẾN LƯỢC (định hướng tư duy)

- Mặt S **không phải mặt kín**
- **Gauss–Ostrogradsky chỉ dùng cho mặt kín**

⇒ Vì vậy:

- Ta **đóng mặt S lại** bằng cách thêm **mặt đáy**
- Sau đó dùng Gauss
- Cuối cùng **trừ đi thông lượng của mặt đáy**

1 BƯỚC 1: ĐÓNG MẶT ĐỂ DÙNG GAUSS

Mặt đang có:

- S: mặt parabol $z = 1 - x^2 - y^2$, hướng **lên trên**

Mặt cần thêm:

- S_1: mặt phẳng

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

- **Định hướng xuống dưới** (đúng chuẩn "ra ngoài khối")

Khi đó:

- $S \cup S_1 = \partial E$
- E là khối nằm **giữa parabol và mặt phẳng** $z = 0$

2 BƯỚC 2: MÔ TẢ KHỐI E

Khối E bị chặn bởi:

- Trên: $z = 1 - x^2 - y^2$
- Dưới: $z = 0$

Hình chiếu xuống mặt phẳng xy:

$$1 - x^2 - y^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 1$$

$\Rightarrow$ **đĩa tròn đơn vị**

Viết miền E chuẩn chỉnh:

Dạng Descartes:

$$\boxed{E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}}$$

3 BƯỚC 3: TÍNH DIVERGENCE

Nhắc lại:

$$\vec{F} = (x,\ y,\ 2 - 2z)$$

Công thức:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial (2 - 2z)}{\partial z}$$

Tính từng đạo hàm

- $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$
- $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$
- $\frac{\partial (2-2z)}{\partial z} = -2$

Kết luận:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = 1 + 1 - 2 = 0}$$

Cực kỳ quan trọng

$\rightarrow$ divergence bằng **0**, nên tích phân thể tích sẽ bằng **0**

4 BƯỚC 4: ÁP DỤNG GAUSS–OSTROGRADSKY

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iiint_E 0\, dV = 0$$

Mà:

$$\iint_{\partial E} = \iint_S + \iint_{S_1}$$

Suy ra:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

5 BƯỚC 5: TÍNH THÔNG LƯỢNG QUA MẶT ĐÁY S_1

Mặt S_1:

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

Vectơ pháp tuyến hướng xuống:

$$\vec{n} = (0, 0, -1)$$

Trường trên mặt S_1:

$$\vec{F}(x, y, 0) = (x,\ y,\ 2)$$

Tích vô hướng:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (x, y, 2) \cdot (0, 0, -1) = -2$$

Tích phân mặt:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (-2)\, dA$$

Tính diện tích:

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} dA = \pi$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -2\pi$$

6 BƯỚC 6: SUY RA KẾT QUẢ CUỐI

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = -(-2\pi) = \boxed{2\pi}$$

KẾT LUẬN CHUẨN TRANG 24

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 2\pi}$$

TÓM TẮT TƯ DUY "NHÌN PHÁT LÀ BIẾT DÙNG GAUSS"

- Mặt **không kín** $\rightarrow$ **đóng mặt**
- Thấy $\mathbf{div = 0}$ $\rightarrow$ khỏi cần tích phân thể tích
- Chỉ còn **tính mặt dễ nhất** (ở đây là đĩa tròn)